COMPITO DI METÀ SEMESTRE
Analisi due (Primo modulo) - Corso di Laurea in FISICA
Sabato 21 Novembre, 1998

1. Si trovi la soluzione generale della seguente equazione:

$$(a) y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0$$

$$(b) y''' + 5y'' + 7y' + 3y = 0$$

SOLUZIONE:(a) *Il polinomio caratteristico dell'equazione* $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3$ *si fattorizza in* $(\lambda - 3)(\lambda - 1)^2$. *La soluzione associata alla radice* $\lambda_1 = 3$ *è* e^{3x} *e le soluzioni associate alla radice doppia* $\lambda_{2,3} = 1$ *sono* e^x *e* xe^x. *La soluzione generale quindi è* $y(x) = c_1 e^{3x} + (c_2 + c_3 x)e^x$.
(b) *Il polinomio caratteristico dell'equazione* $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3$ *si fattorizza in* $(\lambda + 3)(\lambda + 1)^2$. *La soluzione associata alla radice* $\lambda_1 = -3$ *è* e^{-3x} *e le soluzioni associate alla radice doppia* $\lambda_{2,3} = -1$ *sono* e^{-x} *e* xe^{-x}. *La soluzione generale quindi è* $y(x) = c_1 e^{-3x} + (c_2 + c_3 x)e^{-x}$.

2. Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$(a) \begin{cases} y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

SOLUZIONE:(a) *Si tratta di un equazione omogenea. La trasformazione standard* $u = y/x$ *(in modo che* $y' = u + xu'$*) porta all'equazione a variabili separabili* $xu' = 1/u$ *che ha soluzione generale* $(u(x))^2 = c + 2\ln x$ *e quindi* $(y(x))^2 = cx^2 + 2x^2 \ln x$. *Osservando che* $1 = y(1) > 0$ *si ottiene che* $1 = y(1)^2 = c + 2\ln 1$ *e quindi la soluzione è* $y(x) = x\sqrt{1 + 2\ln x}$.
(b) *Si tratta di un equazione omogenea. La trasformazione standard* $u = y/x$ *(in modo che* $y' = u + xu'$*) porta all'equazione a variabili separabili* $xu' = -1/u$ *che ha soluzione generale* $(u(x))^2 = c - 2\ln x$ *e quindi* $(y(x))^2 = cx^2 - 2x^2 \ln x$. *Osservando che* $2 = y(1) > 0$ *si ottiene che* $4 = y(1)^2 = c + 2\ln 1$ *e quindi la soluzione è* $y(x) = x\sqrt{4 - 2\ln x}$.

3. Si determini la soluzione generale del seguente sistema di equazioni differenziali e si classifichi il flusso associato allo spazio delle soluzioni:

$$(a) \begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$(b)\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases}$$

SOLUZIONE:(a) *La matrice associata al sistema è* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *e ha polinomio caratteristico* $\lambda^2+2 = (\lambda-\sqrt{2}i)(\lambda+\sqrt{2}i)$. *Gli autovettori* (v_1, v_2) *associati a* $\sqrt{2}i$ *soddisfano* $(1-\sqrt{2}i)v_1 + 3v_2 = 0$ *e quindi possiamo prendere* $(v_1, v_2) = (3, \sqrt{2}i - 1)$. *Infine, una base per lo spazio delle soluzioni del sistema si ottiene considerando la parte reale e la parte immaginaria di* $\begin{pmatrix} 3(\cos\sqrt{2}x+i\sin\sqrt{2}x) \\ (\sqrt{2}i-1)(\cos\sqrt{2}x+i\sin\sqrt{2}x) \end{pmatrix}$ *e quindi la soluzione generale è*

$$\begin{cases} y_1(x) = 3c_1\cos\sqrt{2}x + 3c_2\sin\sqrt{2}x \\ y_2(x) = -c_1(\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin 2x) + c_2(\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x - \sin\sqrt{2}x) \end{cases}.$$

Il flusso associato allo spazio delle soluzioni è un centro in quanto gli autovalori sono numeri complessi puramente immaginari.
(b) *La matrice associata al sistema è* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *e ha polinomio caratteristico* $\lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$. *Gli autovettori* (v_1, v_2) *associati a* $\lambda = i$ *soddisfano* $(1-i)v_1 + 2v_2 = 0$ *e quindi possiamo prendere* $(v_1, v_2) = (2, i-1)$. *Infine, una base per lo spazio delle soluzioni del sistema si ottiene considerando la parte reale e la parte immaginaria di* $\begin{pmatrix} 2(\cos x+i\sin x) \\ (i-1)(\cos x+i\sin x) \end{pmatrix}$ *e quindi la soluzione generale è*

$$\begin{cases} y_1(x) = 2c_1\cos x + 2c_2\sin x \\ y_2(x) = -c_1(\cos x + \sin x) + c_2(\cos x - \sin x) \end{cases}.$$

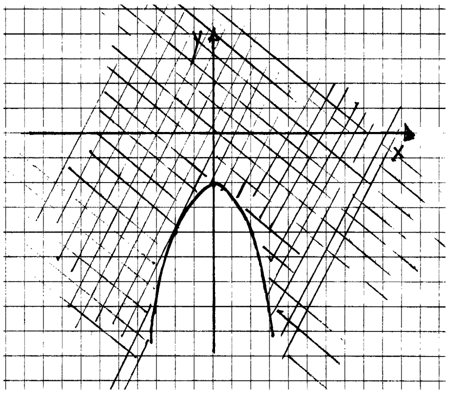
Il flusso associato allo spazio delle soluzioni è un centro in quanto gli autovalori sono numeri complessi puramente immaginari.

4. Sia $\mathbf{Dom}(f)$ il dominio della funzione

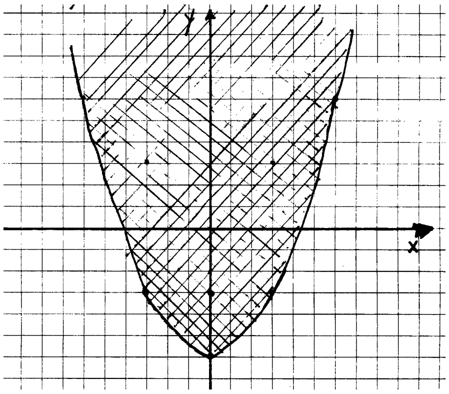
$$(a) f(x,y) = \sqrt{e^{-xy}(y+2+x^2)}$$

$$(b) f(x,y) = \sqrt{e^{xy}(y+2-x^2)}$$

Dopo aver tracciato la figura di $\mathbf{Dom}(f)$, se ne determini l'interno, la chiusura, la frontiera e il derivato.
SOLUZIONE:(a) *Il dominio della funzione si ottiene risolvendo la disequazione* $y + 2 + x^2 \geq 0$ *(l'esponenziale, in quanto sempre positivo è ininfluente ai fini dell'esistenza della funzione). Il grafico:*



Quindi
$\mathbf{Dom}(f)^0 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \textit{ t.c. } y > -2 - x^2\}$,
$\overline{\mathbf{Dom}(f)} = \mathbf{Dom}(f)$,
$\partial(\mathbf{Dom}(f))\ \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \textit{ t.c. } y = -2 - x^2\}$ *e*
$D(\mathbf{Dom}(f)) = \mathbf{Dom}(f)$.
(b) *Il dominio della funzione si ottiene risolvendo la disequazione* $y + 2 - x^2 \geq 0$ *(l'esponenziale, in quanto sempre positivo è ininfluente ai fini dell'esistenza della funzione). Il grafico:*

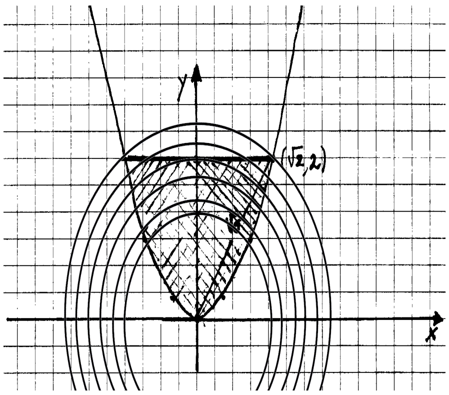


Quindi
$\mathbf{Dom}(f)^0 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \textit{ t.c. } y > -2 + x^2\}$,
$\overline{\mathbf{Dom}(f)} = \mathbf{Dom}(f)$,
$\partial(\mathbf{Dom}(f))\ \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \textit{ t.c. } y = -2 + x^2\}$ *e*
$D(\mathbf{Dom}(f)) = \mathbf{Dom}(f)$.

5. Dopo averne tracciato la figura, si dimostri che il seguente sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ non è compatto costruendo un ricoprimento di aperti che non ammette un sottoricoprimento finito.

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.c. } y \in [0,2] \text{ e } y > x^2\right\}$$

SOLUZIONE: *La figura è la seguente:*



Si consideri la seguente famiglia:

$$\left\{D_{\sqrt{6}-\frac{1}{n}}((0,0))\right\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

È necessario verificare che:
1. La famiglia è un ricoprimento cioè che $S \subset \cup_{n\in\mathbf{N}} D_{\sqrt{6}-\frac{1}{n}}((0,0))$
2 Il ricoprimento non ammette un sottoricoprimento finito cioè (essendo il ricoprimento telescopico) che per ogni $n_0 \in \mathbf{N}$,

$$S \not\subseteq D_{\sqrt{6}-\frac{1}{n}}((0,0)).$$

Per verificare 1. basta osservare che se $(\alpha,\beta) \in S$, *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $\alpha^2+\beta^2 = \sqrt{6}-\delta$ *e quindi* $(\alpha,\beta) \in D_{\sqrt{6}-\frac{1}{n}}((0,0))$ *per tutti gli* $n > \frac{1}{\delta}$.
Per verificare 2. basta osservare che il punto $(\sqrt{(\sqrt{6}-\frac{1}{n_0})^2-4}, 2) \in S$ *non appartiene a* $D_{\sqrt{6}-\frac{1}{n_0}}((0,0))$ *qualunque sia* $n_0 \in \mathbf{N}$.

6. Si discuta la continuità della seguente funzione $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$:

$$(a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\arctan x}{y^2+(\arctan x)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(b) g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\arctan y}{x^2+(\arctan y)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

SOLUZIONE: (a) *La funzione è sicuramente continua per tutti i valori di* (x,y) *per cui non si annulla il denominatore* $y^2+(\arctan x)^2$. *Quest'ultimo si annulla esclusivamente per* $(x,y) = (0,0)$. *Adesso utilizzando la disuguaglianza* $|ab|/(a^2+b^2) \leq 1$, *otteniamo che per*

$(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| \leq |x|$. *Con il metodo del confronto otteniamo che* $f(x,y)$ *è continua anche in* $(0,0)$.
(b) *La soluzione è la stessa di quella di (a) osservando che* $g(x,y) = f(y,x)$.

7. Si calcoli il differenziale e il piano tangente nel punto $(1,1,e\ln 2)$ della superficie di equazione $z = e^x \ln(y+1)$.
SOLUZIONE: *Il gradiente della funzione è* $\nabla f = (e^x \ln(y+1), e^x/(y+1))$ *e quindi* $\nabla f(1,1) = (e\ln 2, e/2)$. *Quindi per ogni* $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$, *abbiamo*
$$df_{(1,1)}(\xi) = e(\ln 2 \cdot \xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2).$$
oppure usando la notazione che utilizza i differenziali delle proiezioni: $df_{(1,1)} = e\ln 2dx + e/2dy$. *L'equazione del piano tangente in* $(1,1)$ *è* $z = e\ln 2 + e\ln 2(x-1) + e/2(y-1)$.

8. Si calcoli il polinomio di Taylor di grado tre intorno al punto $(0,0)$ della funzione
$$(a) f(x,y) = \ln(x+y+1).$$
$$(b) f(x,y) = \ln(x+y+1).$$
SOLUZIONE:(a) *È facile vedere che* $\partial_x f = \partial_y f = (x+y+1)^{-1}$ *e quindi* $\partial_{x^2} f = \partial_{y^2} f = \partial_{xy} f = -(x+y+1)^{-2}$ *e infine* $\partial_{x^3} f = \partial_{y^3} f = \partial_{xy^2} f = \partial_{x^2y} f = 2(x+y+1)^{-3}$ *Sostituendo* $(x,y) = (0,0)$ *otteniamo*
$$P_3(x,y) = x + y - \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3).$$
(b) *È facile vedere che* $\partial_x f = -\partial_y f = (x-y+1)^{-1}$ *e quindi* $\partial_{x^2} f = \partial_{y^2} f = -\partial_{xy} f = -(x-y+1)^{-2}$ *e infine* $\partial_{x^3} f = -\partial_{y^3} f = \partial_{xy^2} f = -\partial_{x^2y} f = 2(x+y+1)^{-3}$ *Sostituendo* $(x,y) = (0,0)$ *otteniamo*
$$P_3(x,y) = x - y - \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) + \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3).$$

9. Sia
$$(a) f(x,y) = y^3 - 3y + x^3 - 12x.$$
$$(b) f(x,y) = y^3 - 3y - x^3 + 12x.$$
Determinare i punti critici di f e classificarli con il metodo della matrice Hessiania.

SOLUZIONE:(a) *Il gradiente della funzione è dato da* $\nabla f = (3x^2 - 12, 3y^2 - 3)$ *che si annulla nei seguenti quattro punti:*

$$A(2,1) \quad B(2,-1) \quad C(-2,1) \quad D(-2,-1).$$

La matrice Hessiana è data da

$$\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

Quindi A *è un massimo,* D *è un minimo e* B *e* C *non sono né massimi né minimi.*

(b) *Il gradiente della funzione è dato da* $\nabla f = (-3x^2 + 12, 3y^2 - 3)$ *che si annulla nei seguenti quattro punti:*

$$A(2,1) \quad B(2,-1) \quad C(-2,1) \quad D(-2,-1).$$

La matrice Hessiana è data da

$$\begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

Quindi B *è un massimo,* C *è un minimo e* A *e* D *non sono né massimi né minimi.*

10. Si risolva la seguente equazione differenziale:

$$(a)(\cos(x+y) + \cos x)dx + (\cos y + \cos(x+y))dy = 0$$

$$(b)(\cos(x-y) + \cos x)dx + (\cos y - \cos(x-y))dy = 0$$

SOLUZIONE(a) *Si tratta di un equazione differenziale esatta in quanto*

$$\frac{\partial}{\partial y}(\cos(x+y) + \cos x) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos y + \cos(x+y)) = -\sin(x+y).$$

Integrando il primo coefficiente rispetto a x*, otteniamo*

$$\int (\cos(x+y) + \cos x)dx = \sin(x+y) + \sin x + g(y)$$

e derivando rispetto a y *otteniamo*

$$\cos(x+y) + g'(y) = \cos(x+y) + \cos y.$$

Quindi $g(y) = \sin y + c$ *e la soluzione generale è*

$$\sin(x+y) + \sin x + \sin y = -c.$$

(b) *Si tratta di un equazione differenziale esatta in quanto*

$$\frac{\partial}{\partial y}(\cos(x-y)+\cos x) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos y - \cos(x-y)) = \sin(x-y).$$

Integrando il primo coefficiente rispetto a x*, otteniamo*

$$\int (\cos(x-y)+\cos x)dx = \sin(x-y)+\sin x + g(y)$$

e derivando rispetto a y *otteniamo*

$$-\cos(x-y)+g'(y) = -\cos(x-y)+\cos y.$$

Quindi $g(y) = \sin y + c$ *e la soluzione generale è*

$$\sin(x-y)+\sin x+\sin y = -c.$$