COMPITO FINALE
Analisi due (Primo modulo) - Corso di Laurea in FISICA
Sabato 23 Dicembre, 1998

1. Si calcoli il polinomio di Taylor intorno a $(0,0)$ di grado 20 della seguente funzione:

$$f(x,y) = \ln(1+x^4y^3) + \arctan(x^6y^4).$$

SOLUZIONE: *Sia* $g(t) = \ln(1+t)$ *e* $h(t) = \arctan t$. *Calcolando i polinomi di Taylor di grado due intorno a* $t = 0$ *in una variabile, otteniamo:*

$$g(t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3) \quad e \quad h(t) = t + O(t^3).$$

Adesso notiamo che

$$f(x,y) = g(x^4y^3)+h(x^6y^4) = x^4y^3 - \frac{x^8y^6}{2} + x^6y^4 + O(x^{12}y^9) + O(x^{18}y^{12}),$$

Osservando che poiché $x \leq ||(x,y)||$ *e* $y \leq ||(x,y)||$, *si ha che*

$$O(x^{12}y^9) + O(x^{18}y^{12}) = O(||(x,y)||^{21}) + O(||(x,y)||^{30}) = O(||(x,y)||^{21})$$

e quindi $x^4y^3 - \frac{x^8y^6}{2} + x^6y^4$ *è il polinomio di Taylor di grado 20.*

2. Si scriva il polinomio di Taylor di grado due intorno al punto 0 della funzione $y = f(x)$ definita implicitamente da

$$\begin{cases} x^3y + y^3 - \cos x = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

SOLUZIONE: *Sia* $F(x,y) = x^3y + y^3 - \cos x$. *Osservando che poiché* $F(0,1) = 0$ *e* $F_y(0,1) = (x^3 + 3y^2)_{(0,1)} = 3 \neq 0$, *la funzione implicita* $y = f(x)$ *è ben definita e dal Teorema della Funzione Implicita (TFI), otteniamo*

$$f'(0) = -\frac{F_x(0,1)}{F_y(0,1)} = \left(-\frac{3x^2y + \sin x}{x^3 + 3y^2}\right)_{(0,1)} = 0.$$

Per calcolare $f''(0)$, osserviamo che

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}\right) =$$

$$\left(-\frac{(F_{xx}+F_{yx}f'(x))F_y - F_x(F_{xy}+F_{yy}f'(x))}{(F_y)^2}\right).$$

e quindi, poiché

$$f'(0) = F_x(0,1) = 0, F_y(0,1) = 3 \quad e \quad F_{xx}(0,1) = (6xy + \cos x)_{(0,1)} = 1$$

otteniamo $f''(0) = -\frac{1}{3}$. Infine il polinomio di Taylor $P_2(x)$ di grado 2 intorno a 0 è:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 1 - \frac{1}{6}x^2.$$

3. Sia

$$\underline{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ y^2+x+1 \\ xyz+1 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver verificato che $\underline{f}$ è invertibile in $(1,0,1)$, si scriva la matrice Jacobiana nel punto $(1,2,1)$ della funzione inversa.
(*Suggerimento:* $(1,2,1) = f(1,0,1)$.)

SOLUZIONE: *La matrice Jacobiana di $\underline{f}$ in $(1,0,1)$ è:*

$$J(\underline{f})_{(1,0,1)} = \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ 1 & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}_{(1,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dal teorema della funzione inversa otteniamo che

$$J(\underline{f}^{-1})_{f(1,0,1)} = \left(J(\underline{f})_{(1,0,1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Facendo i calcoli (dell'inversa di una matrice 3×3) troviamo

$$J(\underline{f}^{-1})_{(1,2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Si calcoli la lunghezza della curva associata alla seguente rappresentazione parametrica:

$$\underline{x}(t) = \left(2t, \ln t, t^2\right), t \in [1, 10].$$

SOLUZIONE: *Utilizzando la formula*

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ||\underline{x}'(t)||dt$$

si trova che $\underline{x}'(t) = (2, \frac{1}{t}, 2t)$ *e quindi*

$$L = \int_1^{10} \sqrt{4 + \frac{1}{t^2} + 4t^2}dt = \int_1^{10} \sqrt{(2t + \frac{1}{t})^2}dt = \int_1^{10} (2t + \frac{1}{t})dt =$$

$$\left[t^2 + \ln t\right]_1^{10} = 99 + \ln 10.$$

5. Si calcoli l'equazione del piano tangente e quella della retta normale alla superficie:

$$x^4 + 3y^3 - 4z^6 = 0$$

nel punto $P = (1, 1, 1)$. Si dica inoltre rispetto a quale delle tre variabili si può applicare il teorema della funzione implicita nel punto P e si calcoli il gradiente delle funzioni così definite.

SOLUZIONE: *Sia* $F(x, y, z) = x^4 + 3y^3 - 4z^6$. *Osserviamo che il gradiente*

$$\nabla(F)(1, 1, 1) = (4x^3, 9y^2, -24z^5)_{(1,1,1)} = (4, 9, -24)$$

è normale alla superficie $F(x, y, z) = 0$ *nel punto* $(1, 1, 1)$. *Quindi l'equazione del piano tangente* π *in* $(1, 1, 1)$ *è data da:*

$$(x - 1, y - 1, z - 1) \cdot \nabla(F)(1, 1, 1) = 0$$

e l'equazione parametrica della retta $\mathbf{r}$ *normale è data da* $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t\nabla(F)(1, 1, 1)$. *Facendo i calcoli arriviamo a*

$$\pi : 4x + 9y - 24z + 11 = 0 \quad e \quad \mathbf{r} : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + 9t \\ z = 1 - 24t \end{cases}$$

Poiché tutte e tre le derivate parziali sono non nulle nel punto $(1,1,1)$, *possiamo applicare il TFI rispetto a tutte le variabili e si ha*

$$\nabla(f(x,y))(1,1) = -\left(\frac{F_x(1,1,1)}{F_z(1,1,1)}, \frac{F_y(1,1,1)}{F_z(1,1,1)}\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{3}{8}\right).$$

$$\nabla(h(x,z))(1,1) = -\left(\frac{F_x(1,1,1)}{F_y(1,1,1)}, \frac{F_z(1,1,1)}{F_y(1,1,1)}\right) = \left(-\frac{4}{9}, \frac{8}{3}\right).$$

$$\nabla(g(y,z))(1,1) = -\left(\frac{F_y(1,1,1)}{F_x(1,1,1)}, \frac{F_z(1,1,1)}{F_x(1,1,1)}\right) = \left(-\frac{9}{4}, 6\right).$$

dove f, h *e* g *sono definite da* $F(x,y,f(x,y)) = F(x,h(x,z),z) = F(g(y,z),y,z) = 0$.

6. Si calcoli il seguente integrale:

$$\iint_D x^2 + y^2$$

dove D è il dominio limitato dalle parabole $y = x^2$ e $x = y^2$.

SOLUZIONE: *Osserviamo che* D *è un* x*-dominio infatti:*

$$D = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\right\}$$

applicando la relativa formula per gli integrali doppi si ha

$$\iint_D x^2 + y^2 = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\ (x^2 + y^2) = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{5/2} + \frac{x^{3/2}}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx = \left[\frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{2}{15}x^{5/2} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right]_0^1 = \frac{6}{35}.$$

7. Si calcoli il seguente integrale

$$\iiint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$$

dove Ω è la sfera $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

SOLUZIONE: *Utilizzando la trasformazione in coordinate sferiche*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\omega \\ y = \rho\sin\theta\sin\omega \\ z = \rho\cos\omega \end{cases} \qquad |\det(J(x,y,z))| = \rho^2\sin\omega,$$

osservando che si sta integrando su una sfera unitaria e che

$$x^2+y^2+(z-2)^2 = \rho^2 - 4\rho\cos\omega + 4,$$

otteniamo

$$\iiint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^\pi d\omega \frac{\rho^2\sin\omega}{\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\omega+4}}.$$

Mentre la variabile θ è già separata, è opportuno integrare prima rispetto a ω e poi rispetto a ρ:

$$\iiint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} = 2\pi\int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^\pi \frac{-d\cos\omega}{\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\omega+4}} =$$

$$2\pi\int_0^1 \rho^2 d\rho \left[\frac{1}{2\rho}\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\omega+4}\right]_0^\pi =$$

$$\pi\int_0^1 \rho\left[\sqrt{\rho^2+4\rho+4} - \sqrt{\rho^2-4\rho+4}\right] d\rho =$$

$$= \pi\int_0^1 \rho\left[\sqrt{(\rho+2)^2} - \sqrt{(\rho-2)^2}\right] d\rho = 4\pi\int_0^1 \rho d\rho = 2\pi.$$

8. Si calcoli l'area della superficie del solido ottenuto ruotando intorno all'asse y la curva associata alla rappresentazione

$$(x(t), y(t)) = (t+1, \frac{t^2}{2}+t) \quad \text{con} \quad t\in[0,4].$$

SOLUZIONE: *L'area della superficie ottenuta dalla rotazione intorno all asse y di una rappresentazione parametrica $(x(t), y(t))$ è data da:*

$$A = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} x(t)\cdot ||(x'(t), y'(t))||dt.$$

Nel nostro caso $||(x'(t), y'(t))|| = \sqrt{1 + (t+1)^2}$ *e quindi*

$$A = 2\pi \int_0^4 (t+1)\sqrt{1+(t+1)^2}dt = 2\pi \int_1^{25} \sqrt{1+u}\frac{1}{2}du$$

dopo aver posto $u = (t+1)^2$, $du = 2(t+1)dt$. *Risolvendo l'integrale*

$$A = \pi \left[\frac{2}{3}(1+u)^{3/2}\right]_1^{25} = \frac{2\pi}{3}(26^{3/2} - 2^{3/2}).$$

9. Si verifichi se il seguente campo è conservativo e si calcoli il lavoro compiuto dal campo lungo la traiettoria $\mathcal{C}$

$$\underline{f}(x,y,z) = \left(\frac{1}{z}, \frac{-3}{z}, \frac{3y - x + z^3}{z^2}\right)$$

$$\mathcal{C} = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t-1 \end{cases} \qquad t \in [2,4]$$

(Suggerimento: Provare a calcolare un potenziale)

SOLUZIONE: *Il campo* $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ *soddisfa le equazioni di compatibilità*

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{3}{z^2} = \frac{\partial f_3}{\partial y}$$

quindi $\underline{f}$ *è un campo conservativo in una regione semplicemente connessa di* $\mathbf{R}^3$ *non contenente il piano* $z = 0$. *Ora calcoliamo il potenziale di* $\underline{f}$:

$$U = -\int f_1 dx + g(y,z) = -\frac{x}{z} + g(y,z).$$

Adesso, da

$$f_2 = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{3}{z}$$

si ottiene

$$g(y,z) = -\frac{3y}{z} + h(z) \qquad e \qquad U(x,y,z) = -\frac{x}{z} + \frac{3y}{z} + h(z).$$

Inoltre, da

$$f_3 = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3y - x}{z^2} + \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{3y - x + z^3}{z^2}$$

si ottiene $h(z) = \frac{z^2}{2}$. *Quindi*

$$U = -\frac{x - 3y}{z} - \frac{z^2}{2} + C$$

e il campo è conservativo su tutto il suo dominio. Alla luce di questa deduzione, per calcolare il lavoro è sufficiente calcolare

$$L = U(x(2), y(2), z(2)) - U(x(4), y(4), z(4)) = U(2, 4, 1) - U(4, 16, 3) =$$

$$= -(-10) - \frac{1}{2} + \frac{-44}{3} + \frac{9}{2} = -\frac{2}{3}.$$

10. Si utilizzi il Teorema di Green per calcolare l'area racchiusa all'interno della curva piana associata alla rappresentazione parametrica

$$\underline{x}(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

mediante un integrale curvilineo.

SOLUZIONE: *In un Corollario del Teorema di Green si afferma che l'area racchiusa all'interno di una curva piana chiusa* $\mathcal{C}$ *è data dall'integrale curvilineo di seconda specie:*

$$A = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} xdy - ydx.$$

Nel nostro caso abbiamo

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos^3 t)d(a\sin^3 t) - (a\sin^3 t)d(a\cos^3 t) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} 3(\cos^4 t\sin^2 t + \cos^2 t\sin^4 t)dt == \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} (\cos t\sin t)^2 dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2 t dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{8} dt = \frac{3a^2\pi}{8}.$$