Esercizi di Topologia in $\mathbf{R}^n$ (II)

A. Dopo averne tracciato il grafico, si dimostri che ciascuno dei seguenti insiemi non è compatto costruendo in ciascun caso un ricoprimento di dischi che non ammette un sottoricoprimento finito:

1. in $\mathbf{R}^2$: $\{(x, y)$ t.c. $|x| + |y| < 2\}$;
2. in $\mathbf{R}^3$: $\{(x_1, x_2, x_3)$ t.c. $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 \in (-2, 2)\}$;
3. in $\mathbf{R}^2$: $\{(x, y)$ t.c. $|x - y| < 1, x \in [-2, 2]\}$;
4. in $\mathbf{R}^3$: $\{(x, y, z)$ t.c. $1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$;
5. in $\mathbf{R}^3$: $\{(x, y, z)$ t.c. $x^2 - y^2 - z^2 < 0, x \in [0, 4]\}$.

B. Per ciascuna delle seguenti funzioni si tracci il grafico del dominio $\mathbf{Dom}(f)$ e si determinino:
l'interno $\mathbf{Dom}(f)^o$, la frontiera $\partial\mathbf{Dom}(f)$, la chiusura $\overline{\mathbf{Dom}(f)}$ e il derivato $D(\mathbf{Dom}(f))$:

1. $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}(x^2 + (y-3)^2)}$;
2. $f(x, y) = \log(x^2 + (y-5)^2)$;
3. $f(x, y) = \tan\left(\frac{\pi}{2}xy\right)$;
4. $f(x, y) = \sqrt{\log(x^2 + 3y^2)}$;
5. $f(x, y) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(x + y)\right) + \log(9 - x^2 - y^2)$
6. $f(x, y, z) = \frac{1}{\cos(x^2+y^2+z^2)}$.

C. Si dimostri il seguente "criterio di continuità in coordinate polari":
Sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ *una funzione dove* $(0, 0) \in A^o \subset \mathbf{R}^n$. *Allora* f *è continua in* $(0, 0)$ *se e solo se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* δ_ϵ *tale che se* $0 < r < \delta_\epsilon$ *allora* $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0, 0)| < \epsilon$.

Si applichi questo criterio per studiare la continuità della seguente funzione al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha y^\beta}{(x^2+y^2)\arctan(y^2+1)} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

D. Si discuta la continuità delle seguenti funzioni in $(x,y) = (0,0)$:

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^4\cos(1/x)}{(x^2+y^2)\arctan(y^2+x^6+1)} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^4}{(x^6+y^6)} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^4}{x^2+y^6} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x+y} & \text{if } x+y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{if } x+y = 0 \end{cases}$$

5.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\sin(x+y)}{\pi-2\arctan(y/x)} & \text{if } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$