PRIMO COMPITO
Analisi due (Primo modulo) - Corso di Laurea in FISICA
Giovedì 7 Gennaio, 1999

1. Si trovi la soluzione generale della seguente equazione:

$$y'' - y' - 2y = 2e^{-x}.$$

SOLUZIONE: *L'equazione omogenea associata* $y'' - y' - 2y = 0$ *ha polinomio caratteristico* $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$. *Quindi la soluzione del sistema omogeneo associato è* $y_o(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$ *e il Wronskiano* $W(x)$ *delle soluzioni è* $W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -3e^x$ *Applichiamo il metodo della variazione dei coefficienti per determinare una soluzione particolare:*

$$y_p(x) = -\left(\int_0^x \frac{e^{-t} \cdot 2e^{-t}}{W(t)} dt\right) e^{2x} + \left(\int_0^x \frac{e^{2t} \cdot 2e^{-t}}{W(t)} dt\right) e^{-x} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\int_0^x e^{-3t} dt\right) e^{2x} - \frac{2}{3}\left(\int_0^x dt\right) e^{-x} = \frac{-2}{9} e^{-x} - \frac{2}{3} x e^{-x}.$$

Infine la soluzione generale è

$$y_o(x) + y_p(x) = d_1 e^{2x} + d_2 e^{-x} - \frac{2}{3} x e^{-x}.$$

2. Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'y'' = 2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

SOLUZIONE: *Poniamo* $u = y'$. *Tramite questa trasformazione l'equazione diventa*

$$\begin{cases} uu' = 2 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

Che è un equazione a variabili separabili e ammette soluzione generale $\frac{1}{2}u^2 = 2x + c$. *La condizione* $u(0) = 2$ *implica* $c = 2$. *Quindi risostituendo* $y' = u$, *si ha l'equazione*

$$\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{x+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Integrando otteniamo $y(x) = \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + c$ e la condizione $y(0) = 1$ implica $c = -1/3$. Infine la solzione del problema di Cauchy è

$$y = \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{1}{3}.$$

3. Si calcoli e^A dove
$$A = \begin{pmatrix} -11 & -3 \\ 36 & 10 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE: *Il polinomio caratteristico di A è*

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

Per ciascuno degli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$ gli autovettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ soddisfano $(A - \lambda_i) \cdot \underline{v}_i = 0$. Cioè

$$\begin{pmatrix} -12 & -3 \\ 36 & 9 \end{pmatrix} \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ 36 & 12 \end{pmatrix} \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considerando solo le prime righe e facendo i calcoli possiamo scegliere:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Quindi se $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ con $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, allora possiamo scrivere $A = B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} B^{-1}$ e quindi

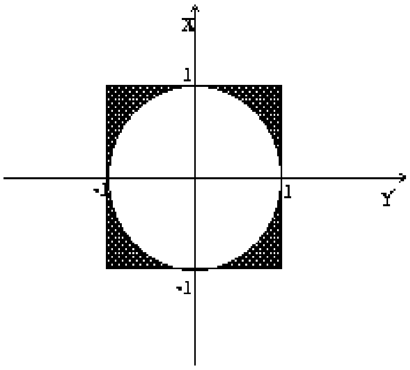
$$e^A = Be^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}} B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e & e^{-2} \\ -4e & -3e^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e + 4e^{-2} & -e + e^{-2} \\ 12(e - e^{-2}) & 4e - 3e^{-2} \end{pmatrix}$$

4. Sia
$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ \mid x \in [-1,1) \ y \in (-1,1] \right\} \bigcap \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ \middle| \ x^2 + y^2 \geq 1 \right\}.$$

Dopo aver tracciato la figura di A, se ne determini l'interno, la chiusura, la frontiera e il derivato.

SOLUZIONE: *La figura di A è la seguente:*



L'interno: $A^o = \{(x, y)|\ x^2 + y^2 > 1,\ x, y \in (-1, 1)\}$.

La chiusura: $\overline{A} = \{(x, y)|\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x, y \in [-1, 1]\}$.

La frontiera: $\partial A = \{(x, y)|\ x^2+y^2 = 1\} \cup (\{1, -1\} \times [-1, 1]) \cup ([-1, 1] \times \{1, -1\})$.

Il derivato: $D(A) = A$.

5. Si dimostri che il seguente sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ è denso in $\mathbf{R}^2$

$$S = \Big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.c. } y + x \notin \mathbf{Z}\Big\}.$$

Si dimostri che il complementare di S non è discreto.

SOLUZIONE: *Per dimostrare la prima parte è equivalente fare vedere che ogni disco contiene elementi di S.*

Sia D un disco e sia $p \in D$ un punto tale che $p = (\alpha, \beta)$ con $\alpha \in \mathbf{Q}$ e $\beta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ (tale p esiste per le proprietà dei numeri reali). È chiaro che $\alpha + \beta \notin \mathbf{Z}$ e quindi $p \in S$ e $D \cap S \neq \emptyset$.

Il complementare S^c di S contiene la retta $x+y = 0$. S^c non è discreto perchè (ad esempio) $(0, 0)$ è di accumulazione per S^c infatti per ogni $\epsilon > 0$, il punto $(\epsilon/, -\epsilon/2) \in D_\epsilon((0, 0)) \cap S^c$. Quindi ogni intorno di $(0, 0)$ contiene punti di $S^c \setminus \{(0, 0)\}$ e $(0, 0)$ non è isolato.

6. Si discuta la continuità della seguente funzione $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ su tutti i punti di $\mathbf{R}^2$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{y^2+|x|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

SOLUZIONE: *Osserviamo che la funzione è sicuramente continua in tutti i punti $(x, y) \neq (0, 0)$ in quanto espressione algebrica. Se $(x, y) =$*

$(0,0)$, *allora si noti che (utilizzando la diseguaglianza* $a/(a+b) \le 1$ *per* $a, b \ge 0$*)*

$$\left| \frac{x}{y^2 + |x|} \right| \le 1.$$

Quindi $|f(x,y)| \le |y|$ *e per il criterio del confronto,* f *è continua anche in* $(0,0)$.

7. Si calcoli il differenziale nel punto $(1,1)$ della funzione

$$f(x,y) = \sin \frac{\pi(x^2+y^2)}{8}.$$

Si trovi un punto (x_0, y_0) tale che $df_{(x_0,y_0)} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} dx$?

SOLUZIONE: *Le derivate parziali sono:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x\pi}{8} \cos \frac{\pi(x^2+y^2)}{8}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y\pi}{8} \cos \frac{\pi(x^2+y^2)}{8}.$$

Quindi $df_{(1,1)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}(dx+dy)$.

Per avere $df_{(x_0,y_0)} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} dx$ *bisogna porre* $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. *La seconda condizione è soddisfatta ad esempio per* $y_0 = 0$ *e con questa scelta la prima condizione diventa:* $\frac{x_0 \pi}{4} \cos \frac{\pi(x_0^2)}{8} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. *Scegliendo* $x_0 = \sqrt{8}$*, otteniamo un identità. Infine* $(x_0, y_0) = (\sqrt{8}, 0)$.

8. Si calcoli l'equazione della quadrica tangente nel punto $(0, \frac{\pi}{2})$ della funzione $f(x,y) = x\cos(y+x)$.

SOLUZIONE: *L'equazione della quadrica tangente in* $\underline{p} = (0, \frac{\pi}{2})$ *è la seguente:*

$$Q(x,y) = f(\underline{p}) + f_x(\underline{p})x + f_y(\underline{p})(y-\pi) +$$
$$+ \frac{1}{2} \left\langle (x, (y-\pi)), \begin{pmatrix} f_{xx}(\underline{p}) & f_{xy}(\underline{p}) \\ f_{xy}(\underline{p}) & f_{yy}(\underline{p}) \end{pmatrix} (x, (y-\pi)) \right\rangle$$

I calcoli delle derivate sono:

$$f_x = \cos(y+x) - x\sin(y+x), \quad f_{xx} = -2\sin(y+x) - x\cos(y+x)$$
$$f_y = -x\sin(y+x), \quad f_{yy} = -x\cos(x+y),$$
$$f_{xy} = -\sin(y+x) - x\cos(y+x).$$

Sostituendo il punto $\underline{p}$*, otteninamo* $f_x(\underline{p}) = 0$, $f_{xx}(\underline{p}) = -2$, $f_y(\underline{p}) = 0$, $f_{yy}(\underline{p}) = 0$, $f_{xy}(\underline{p}) = -1$ *e quindi*

$$Q(x,y) = -2x^2 - x(y - \pi/2).$$

9. Sia $f(x,y) = \arctan(y) \cdot \arctan(x-1)$. Determinare i punti critici di f e classificarli con il metodo della matrice Hessiania.

   SOLUZIONE: *I punti critici soddisfano* $\nabla(f) = (0,0)$. *Il gradiente è*

$$\nabla(f) = \left(\frac{(\arctan y)}{1+(x-1)^2}, \frac{\arctan(x-1)}{1+y^2} \right).$$

   Quindi l'unico punto critico $(1,0)$. *La matrice Hessiana è*

$$\begin{pmatrix} \frac{(\arctan y)2(1-x)}{(1+(x-1)^2)^2} & \frac{1}{(1+y^2)(1+(x-1)^2)} \\ \frac{1}{(1+y^2)(1+(x-1)^2)} & \frac{-2y\arctan(x-1)}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

   Che nel punto $(1,0)$ *è* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Quindi, essendo l'Hessiana indefinita, il punto* $(1,0)$ *è una sella.*

10. Siano

$$f(x,y) = \ln(x^2 + 3 + \cos(y)), \qquad g(t) = \sqrt{t}, \qquad h(t) = \arccos t$$

   e $F(t) = f(g(t), h(t))$. Utilizzare la regola di derivazione delle funzioni composte per calcolare

$$\frac{d}{dt}F(t).$$

   SOLUZIONE: *La formula di derivazione delle funzioni composte afferma che*

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t),h(t))g'(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(g(t),h(t))h'(t) =$$

$$= \frac{2\sqrt{t}}{3+2t}\frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{-\sin(\arccos t)}{3+2t}\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{3+2t}.$$